χωρίς απόδειξη

▶ Έστω Π να είναι ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$

Έστω $f_n : \Pi \to \mathbb{R}$ να είναι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $n = 1, 2, \ldots$

Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{u} f$, όπου $f : \Pi \to \mathbb{R}$ συνάρτηση.

Τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_\Pi f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Pi f_n(x)dx$

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Έστω Π ορθογώνιο του $\mathbb{R}^{n_0}$, $f_n, f : \Pi \to \mathbb{R}$ να είναι συναρτήσεις $n = 1, 2, \ldots$. Υποθέτουμε ότι οι f_n, $n = 1, 2, \ldots$ είναι Riemann ολοκλ. και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_\Pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Pi f_n(x)dx$$

Απόδειξη: Έστω (S_n) να είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της f_n, $n = 1, 2, \ldots$, δηλαδή $S_n(x) = \sum_{n=1}^{n} f_n(x)$ $\forall n = 1, 2, \ldots$, $x \in \Pi$

Τότε από την υπόθεση $S_n \xrightarrow{u} f$, όπου $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Αφού οι f_n, $n = 1, 2, \ldots$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες έπεται (από πρόταση του απειΙV) ότι S_n, $n = 1, 2, \ldots$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες

Αφού $S_n \xrightarrow{u} f$ από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_\Pi f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Pi S_n(x)\,dx$ ①

Από τον απειΙV έχουμε:

$$\int_\Pi S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_\Pi f_k(x)dx \quad ②$$

Από τις ① και ② έπεται ότι: $\int_\Pi f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\int_\Pi f_k(x)dx\right)\right) =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \overset{\text{ορ}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Pi f_n(x)dx.$$

Κριτήριο λόγου D'Alembert

Έστω μια ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών με $a_n \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$

$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, $n=1,2,\dots$ και $p = \lim_{n\to+\infty} \sup\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

- Αν $0 \le p < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα $\left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \right.$ συγκλίνει άρα και απλά$\left. \right)$
- Αν $p > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει
- Αν $p = 1$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε

1ο Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, Riemann ολοκληρώσιμη

Τότε το $\int_\alpha^x f(t)\,dt$, υπάρχει $\forall x \in [\alpha,\beta]$ (από πρόταση του απει I)

Έτσι, ορίζεται καλά η συνάρτηση αόριστο ολοκλήρωμα της f $F:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Τότε η F είναι Lipschitz δηλαδή:

$$|F(x) - F(y)| \le \|f\| \cdot |x-y|, \quad \forall x,y \in [\alpha,\beta] \text{ όπου } \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [\alpha,\beta]\}$$

(έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής άρα και συνεχής)

- Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = f(x_0)$
- Αν η f είναι συνεχής σε όλο το $[\alpha,\beta]$ τότε η F παραγωγίσιμη σε όλο το $[\alpha,\beta]$ και $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

Πρόταση

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ να είναι Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
Ορίζουμε την $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\int_x^\beta f(x)\,dx$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$
Τότε η g είναι Lipschitz (και άρα ομοιόμορφα συνεχής)

- Αν η f είναι συνεχής στο $x_0\in[\alpha,\beta]$ τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $g'(x_0)=-f(x_0)$.
- Αν η f είναι συνεχής σε όλο το $[\alpha,\beta]$ τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $g'(x)=-f(x)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

Συμπέρασμα των προηγούμενων αποτελεσμάτων.

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε την σειρά $1+x_0+\frac{x_0^2}{2!}+\frac{x_0^3}{3!}+\frac{x_0^4}{4!}+\dots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$
εξετάζουμε αν συγκλίνει η σειρά με το κριτήριο λόγου:

$$a_n=\frac{x_0^n}{n!},\quad \text{άρα}\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x_0^n}{n!}}=\frac{x_0^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\,x_0^n}=\frac{x_0\cdot n!}{n!\cdot(n+1)}=\frac{x_0}{n+1}$$

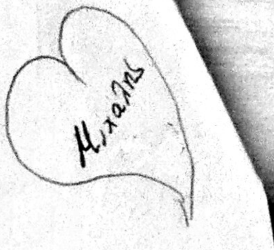
Αλλά $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 0$.
Άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_0^n}{n!}$ συγκλίνει από το κριτήριο λόγου
Άρα $\forall x\in\mathbb{R}$ η σειρά $\sum^{+\infty}\frac{}{n!}\in\mathbb{R}$.
Άρα ορίζεται καλά η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Θέτουμε $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$ για $n=0,1,2,\dots$

Έστω $\tau_0\in\mathbb{R}$, $\tau_0>0$, $f_{\tau_0,n}:[0,\tau_0]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f_{\tau_0,n}(x)=\frac{x^n}{n!}$, $x\in[0,\tau_0]$, $n=0,1,2,\dots$
Δηλαδή $f_{\tau_0,n}=f_n|_{[0,\tau_0]}$ (περιορισμός)

$\sum_{n=0}^{+\infty}\sup_{x\in[0,\tau_0]}|f_{\tau_0,n}(x)|$ ⊗ Για 2 αριθμούς $\alpha\le\beta$ ισχύει ότι $\alpha^n\le\beta^n$

Άρα για $x\in[0,\tau_0]$ είναι $\frac{x^n}{n!}\le\frac{\tau_0^n}{n!}$, $\frac{|x|^n}{n!}\le\frac{\tau_0^n}{n!}$ $\forall x\in[0,\tau_0]$ $\Longrightarrow$



$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau_0^n}{n!}$ από το κριτήριο σύγκρισης σειρών

όμως $\sup_{x\in[0,\tau_0]} |f_{\tau_0,n}(x)| = \frac{\tau_0^n}{n!} \ \forall n=0,1,2,\dots$ (a)

Άρα (*) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x\in[0,\tau_0]} |f_{\tau_0,n}(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau_0^n}{n!} \in \mathbb{R}, \ \forall n=0,1,2,\dots$

Αιτιολόγηση του (a): $|f_{\tau_0,n}(x)| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{\tau_0^n}{n!}$ αυτός ο αριθμός είναι άνω φράγμα και το supremum είναι το ελάχιστο άνω φράγμα.

άρα $\sup_{x\in[0,\tau_0]} |f_{\tau_0,n}(x)| = \frac{\tau_0^n}{n!} \ \forall n=0,1,2,\dots$

Αφού λοιπόν, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x\in[0,\tau_0]} |f_{\tau_0,n}(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau_0^n}{n!} \in \mathbb{R}$ από το κριτήριο λόγου

Weierstrass έπεται ότι η σειρά:

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_{\tau_0,n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Από παρατήρηση $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{\tau_0,n}$.

Έστω $S_{\tau_0,n}$, $n=0,1,2,\dots$ να είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $f_{\tau_0,n}$, $n=0,1,2,\dots$

$S_{\tau_0,n} = \sum_{n=0}^{n} f_{\tau_0,n}$, $n=0,1,2,\dots$ Άρα, η $S_{\tau_0,n}$, $n=0,1,2,\dots$ είναι μια ακολουθία πολυωνύμων (τα πολυώνυμα γνωρίζουμε ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις)

Έτσι, έχουμε, $S_{\tau_0,n} \xrightarrow{u} f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{\tau_0,n}$

Από γνωστή πρόταση που έχουμε δείξει, αφού $S_{\tau_0,n} \xrightarrow{u} f$ και τα $S_{\tau_0,n}$, $n=0,1,2,\dots$ σαν πολυώνυμα είναι συνεχείς συναρτήσεις, έπεται ότι και η συνάρτηση f είναι συνεχής.

$\boxed{\text{Σύνοψη:}}$ Πήραμε την $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ και είδαμε ότι ορίζεται καλά και ότι είναι συνεχής με τη βοήθεια των εργαλείων της ομοιόμορφης σύγκλισης

$\xrightarrow{\text{Συνέχεια}}$ λύσεως $\longrightarrow$

$\longrightarrow$

Αφού $f_{\tau_0,n}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες (σαν συνεχείς συναρτήσεις) έπεται (από την πρόταση που δείξαμε σήμερα) ότι και η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} f_{\tau_0,n}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη και μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της (βάσει του ιδίου θεωρήματος)

$$\int_0^{\tau_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_{\tau_0,n}\right)(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\tau_0} f_{\tau,n}(x)\,dx \quad (1)$$

$$\| \qquad \int_0^{\tau_0} f(x)\,dx$$

Έχουμε: $\displaystyle\int_0^{\tau_0} f_{\tau_0,n}(x)\,dx = \int_0^{\tau_0}\left(\frac{x^n}{n!}\right)dx = \frac{1}{n!}\int_0^{\tau_0} x^n dx = \frac{1}{n!}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\tau_0}\right) =$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{\tau_0^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n!}\,\frac{\tau_0^{n+1}}{n+1} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) είναι:

$$\int_0^{\tau_0} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau_0^{n+1}}{(n+1)!} = \tau_0 + \frac{\tau_0^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} + \cdots = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau_0^n}{n!}\right) - 1 = f(\tau_0) - 1 \quad (3)$$

$$\int_0^{\tau_0} f_{\tau_0}(x)\,dx = f_{\tau_0}(\tau_0) - 1 \quad , \quad f_{\tau_0} = f\big|_{[0,\tau_0]}$$

είναι μια ολοκληρωτική συνάρτηση.

$f_{\tau_0} : [0,\tau_0] \to \mathbb{R}$

$f_{\tau_0}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \forall x \in [0,\tau_0]$ παρόμοια με την (3) έπεται:

$$\int_0^{x} f_{\tau_0}(t)\,dt = f_{\tau_0}(x) - 1 \quad , \forall x \in [0,\tau_0] \quad (1)$$

Έστω $F_{\tau_0} : [0,\tau_0] \to \mathbb{R}$ και είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f_{τ_0}

δηλαδή $F_{\tau_0}(x) = \displaystyle\int_0^{x} f_{\tau_0}(t)\,dt \;\; \forall x \in [0,\tau_0] \quad (2)$ $\longrightarrow \longrightarrow$

από τις ① και ②

$F_{\tau o}(x) = f_{\tau o}(x) - 1 \quad \forall x \in [0, \tau_0]$ ④

Από το 1^{o} $\sqrt{\text{θεμελιώδες}}$ Θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε: αφού $f_{\tau o}$ είναι συνεχής

η $F_{\tau o}$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $[0, \tau_0]$

στο $[0, \tau_0]$ και $F'_{\tau o}(x) = f_{\tau o}(x)$, $\forall x \in [0, \tau_0]$ ③

Από την ④ η $f_{\tau o}$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της $[0, \tau_0]$

Από την ④ $F'_{\tau o}(x) = (f_{\tau o}(x) - 1)' = f'_{\tau o}(x)$, $\forall x \in [0, \tau_0]$ ⑤

Από τις ③,⑤ $\Rightarrow f'_{\tau o}(x) = f_{\tau o}(x)$, $\forall x \in [0, \tau_0]$, αφού το τ_0 τυχαίο θα

έχουμε παρόμοια: $f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

και έχουμε την πληροφορία ότι $\boxed{f(0) = 1.} = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots$

Μία συνάρτηση της μορφής $f'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ είναι η εκθετική $f(x) = e^x = f'(x)$
θα δείξουμε ότι είναι μόνο αυτή:

Έχουμε $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, $x \geq 0$

$f(x) > 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$

Δηλαδή $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$

Έστω $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g'(x) = g(x)$ $\forall x \in [0, +\infty)$, $g(x) \neq 0$ $\forall x \in [0, +\infty)$

και τέλος $g(0) = 1$.

Τότε $g(x) > 0$ σίγουρα $\forall x \in [0, +\infty)$ αφού $g(0) = 1 > 0$ και $g(x) \neq 0$

Αν υπήρχε $y_0 \in (0, +\infty)$: $g(y_0) < 0$ τότε από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών
θα υπήρχε $y_1 \in (0, y_0)$: $g(y_1) = 0$ άτοπο αφού $g(x) \neq 0$ και g συνεχής.

Άρα ισχύει ότι $g(x) > 0$ $\forall x \in [0, +\infty)$

Έστω f και $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g'(x) = g(x)$ $\forall x \in [0, +\infty)$, $g(0) = 1$, $g(x) \neq 0$
$\forall x \in [0, +\infty)$ (f είναι η αρχική)

$f'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \quad \forall x \in [0, +\infty)$ ① . Παρόμοια για την g:

$g'(x) = g(x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \quad \forall x \in [0, +\infty)$ ②

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \forall x \in [0,+\infty) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \forall x \in [0,+\infty)$

[Ο αριθμός $\frac{g(x)}{f(x)} \neq 0$] $\Rightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)} = 0 \quad \forall x \in [0,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = 0 \quad , \forall x \in [0,+\infty)$ Άρα υπάρχει $c_0 \in \mathbb{R}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = c_0 \quad \forall x \in [0,+\infty)$

$\Rightarrow f(x) = g(x) \cdot c_0 \quad \forall x \in [0,+\infty)$

Αλλά $f(0) = g(0) = 1$. Άρα $c_0 = 1$, άρα $f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,+\infty)$

Άρα η αρχική σειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ είναι η μοναδική συνάρτηση

που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $y'(x) = y(x) \quad \forall x \in [0,+\infty)$

με $y(0) = 1$ και $y(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0,+\infty)$

$$\boxed{\text{Άρα } e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Αυτό που μας έχει μείνει είναι η περίπτωση που $f_{\tau_0} : [-\tau_0, 0] \to \mathbb{R}$ (για $\tau_0 > 0$)

$f_{\tau_0}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in [-\tau_0, 0]$

Παρόμοια δείχνουμε ότι η f_{τ_0} είναι συνεχής

Θέτουμε $f_{\tau_0,n} : [-\tau_0, 0] \to \mathbb{R}$, $f_{\tau_0,n}(x) = \frac{x^n}{n!}$, $x \in [-\tau_0, 0]$, $\forall n = 0,1,2,\ldots$

Έχουμε $f_{\tau_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{\tau_0,n}$ (από γνωστή παρατήρηση που έχουμε πει)

Στη συνέχεια,

$$\int_{-\tau_0}^{0} f_{\tau_0,n}(x)\,dx = \int_{-\tau_0}^{0} \frac{x^n}{n!}\,dx = \frac{1}{n!}\int_{\tau_0}^{0} x^n dx = \frac{1}{n!}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{-\tau_0}^{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{0}{n+1} - \frac{(-\tau_0)^{n+1}}{n+1}\right) = -\frac{(-\tau_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Θα διαχωρίσουμε 2 περιπτώσεις πιό αναλυτικά στο επόμενο μάθημα που στις σημειώσεις του καθηγητή